Points algébriques sur certaines courbes planes lisses

Moustapha CAMARA

Université Assane Seck, Ziguinchor, Sénégal

UFR Sciences et Technologies

Laboratoire de Mathématiques et Applications (LMA)

Domaine d'expertise : **Géométrie Algébrique**

Journées Algébriques du Gabon $5^{\text{ème}}$ édition - Du 10 au 23 mars 2025

ENS de Libreville, le 19 mars 2025

Plan

☞ 2013 **Baccalauréat série S1**, *Lycée Charles De Gaulle de Saint-Louis.*

- 2013 **Baccalauréat série S1**, *Lycée Charles De Gaulle de Saint-Louis.*
- 2013 – 2016 **Licence de mathématiques fondamentales**
  Université Assane Seck de Ziguinchor (UASZ), Sénégal.
- 2016 – 2018 **Master de mathématiques pures**, UASZ.

  Mémoire : Théorème de Riemann-Roch.
  - Soutenu le 26 octobre 2019
  - Pr Oumar SALL

- ☞ 2013 **Baccalauréat série S1**, *Lycée Charles De Gaulle de Saint-Louis.*
- ☞ $2013-2016$ **Licence de mathématiques fondamentales**
  Université Assane Seck de Ziguinchor (UASZ), Sénégal.
- ☞ $2016-2018$ **Master de mathématiques pures**, UASZ.

  Mémoire : Théorème de Riemann-Roch.
  - ✐ Soutenu le 26 octobre 2019
  - ✐ Pr Oumar SALL
- ☞ $2019-2023$ **Thèse de doctorat**, UASZ.

  Sujet de la thèse : Application de la finitude du groupe de Mordell-Weil et du théorème de Chevalley-Weil sur la détermination des points algébriques de degré donné sur certaines courbes planes lisses.
  - ✐ Soutenue le 02 mars 2024.
  - ✐ Pr Oumar SALL

- 2013 **Baccalauréat série S1**, *Lycée Charles De Gaulle de Saint-Louis.*
- 2013 – 2016 **Licence de mathématiques fondamentales**
  Université Assane Seck de Ziguinchor (UASZ), Sénégal.
- 2016 – 2018 **Master de mathématiques pures**, UASZ.

  Mémoire : Théorème de Riemann-Roch.
  - Soutenu le 26 octobre 2019
  - Pr Oumar SALL
- 2019 – 2023 **Thèse de doctorat**, UASZ.

  Sujet de la thèse : Application de la finitude du groupe de Mordell-Weil et du théorème de Chevalley-Weil sur la détermination des points algébriques de degré donné sur certaines courbes planes lisses.
  - Soutenue le 02 mars 2024.
  - Pr Oumar SALL
- **Depuis octobre** 2024, j'ai été recruté en tant qu'enseignant-chercheur au département de mathématiques de l'UASZ.

Une **équation diophantienne** est une équation polynômiale

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

à deux indéterminées à coefficients entiers dont on recherche les solutions rationnelles $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

Une **équation diophantienne** est une équation polynômiale

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

à deux indéterminées à coefficients entiers dont on recherche les solutions rationnelles $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

Du point de vue géométrique, cela se traduit par la recherche des points rationnels appartenant à une courbe algébrique plane d'équation

$$\mathcal{C} : f(x, y) = 0. \tag{2}$$

Une **équation diophantienne** est une équation polynômiale

$$f(x,y)=0, \tag{1}$$

à deux indéterminées à coefficients entiers dont on recherche les solutions rationnelles $(x,y)\in\mathbb{Q}^2$.

Du point de vue géométrique, cela se traduit par la recherche des points rationnels appartenant à une courbe algébrique plane d'équation

$$\mathcal{C}: f(x,y)=0. \tag{2}$$

On s'aperçoit rapidement qu'il est intéressant de généraliser ce problème en remplaçant $\mathbb{Q}$ par un corps de nombres K.

De ce point de vue géométrique, les premiers résultats généraux concernant l'étude des points rationnels sur les courbes algébriques semblent être dus à **Hilbert et Hurwitz** [1].

Hilbert

Ils ont prouvé que le bon paramètre pour étudier les points rationnels est le genre de la courbe et non le degré du polynôme définissant la courbe.

Hurwitz

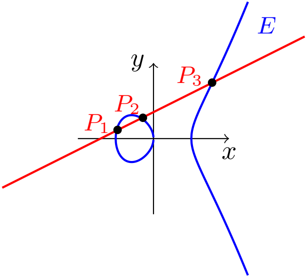
Ils résolvent le cas des courbes de genre 0.

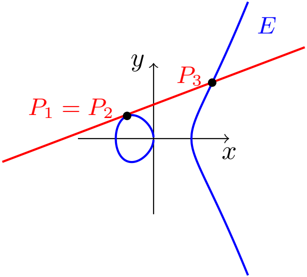
1. [HH90] D. Hilbert and A. Hurwitz, Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null. Acta Math., $14(1) : 217 - 224$, (1890).

Poincaré [2]

Poincaré

Procédé de construction :
Il traite les courbes de genre 1 (i.e., les courbes elliptiques), en expliquant le procédé de construction de solutions à partir de cordes ou tangentes.

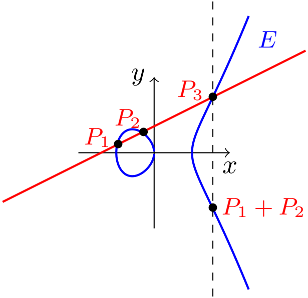




2. [Poi01] H. Poincaré, Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, J. de Liouville 7, $161 - 233$, (1901).

Mordell[3]

Mordell



Théorème de Mordell :

Toutes les solutions rationnelles peuvent se déduire d'un nombre fini d'entre elles par ce procédé géométrique de cordes ou tangentes. En d'autres termes, considérons E une courbe elliptique, l'ensemble $E(K)$ des points de E rationnels sur K est un groupe abélien de type fini.

Conjecture de Mordell :

Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective lisse irréductible définie sur K de genre $g \geq 2$. Alors l'ensemble $\mathcal{C}(K)$ des points de $\mathcal{C}$ rationnels sur K est fini.

3. [Mor22] L. J. Mordell, On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees, Proc. Camb. Phil. Soc. $21, 179 - 192, (1922)$.

Weil[4]

Weil

Théorème de Mordell et Weil

Soit $\mathcal{C}$ une courbe de genre $g \geq 1$ définie sur un corps de nombres K. Notons $J_{\mathcal{C}}$ la jacobienne de $\mathcal{C}$. Alors le groupe $J_{\mathcal{C}}(K)$ des points rationnels de $J_{\mathcal{C}}$ est un **groupe abélien de type fini** :

$$J_{\mathcal{C}}(K) \cong \mathbb{Z}^r \oplus J_{\mathcal{C}}(K)_{\text{tors}} \text{ avec } r \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

L'entier naturel r est le rang de la jacabienne $J_{\mathcal{C}}$ et $J_{\mathcal{C}}(K)_{\text{tors}}$ est le sous-groupe de torsion de $J_{\mathcal{C}}(K)$.

4. [Wei29] A. Weil, L'arithmétique sur les courbes algébriques. Acta Math., 52, $281 - 315$, (1929).

Faltings [5].

Faltings

Théorème de Faltings :
Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective lisse irréductible de genre $g \geq 2$ définie sur K. Alors $\mathcal{C}(K)$ est fini.

5. [Fal83] G. Faltings, Endlichkeitsätze für abelsch Varietäten über Zahlkörpen, Invent. Math. 73, $349 - 366$, (1983).

Faltings[5].

Faltings

Théorème de Faltings :
Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective lisse irréductible de genre $g \geq 2$ définie sur K. Alors $\mathcal{C}(K)$ est fini.

Le **degré d'un point algébrique** R sur $\mathcal{C}$ est le degré de son corps de définition sur $\mathbb{Q}$:

$$\deg(R) = [\mathbb{Q}(R) : \mathbb{Q}] = \begin{cases} 1 & \text{on dit que} & R & \text{rationnel} \\ 2 & .. & R & \text{quadratique} \\ 3 & .. & R & \text{cubique} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{cases}$$

5. [Fal83] G. Faltings, Endlichkeitsätze für abelsch Varietäten über Zahlkörpen, Invent. Math. 73, $349 - 366$, (1983).

Faltings[5].

Faltings

Théorème de Faltings :
Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective lisse irréductible de genre $g \geq 2$ définie sur K. Alors $\mathcal{C}(K)$ est fini.

Le **degré d'un point algébrique** R sur $\mathcal{C}$ est le degré de son corps de définition sur $\mathbb{Q}$:

$$\deg(R) = [\mathbb{Q}(R) : \mathbb{Q}] = \left\{ \begin{array}{llll} 1 & \text{on dit que} & R & \text{rationnel} \\ 2 & .. & R & \text{quadratique} \\ 3 & .. & R & \text{cubique} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right.$$

Supposons que nous connaissons un point $P_\infty \in \mathcal{C}(K)$. On a alors un plongement

$$j : \mathcal{C} \hookrightarrow J_{\mathcal{C}}, \; P \longmapsto j(P) = [P - P_\infty]. \tag{4}$$

5. [Fal83] G. Faltings, Endlichkeitsätze für abelsch Varietäten über Zahlkörpen, Invent. Math. 73, $349 - 366$, (1983).

Considérons les courbes hyperelliptiques définies sur $\mathbb{Q}$ de genre 2 d'équations affines

$$\mathcal{C}_n : y^2 = f_n(x) = x(x^2 - n^2)(x^2 - 4n^2), \tag{5}$$

avec $n \in \{1,\, 2,\, 3,\, q$ un nombre premier et $q \equiv 7 \pmod{24}\}$.

Considérons les courbes hyperelliptiques définies sur $\mathbb{Q}$ de genre 2 d'équations affines

$$\mathcal{C}_n : y^2 = f_n(x) = x(x^2 - n^2)(x^2 - 4n^2), \tag{5}$$

avec $n \in \{1, 2, 3, q$ un nombre premier et $q \equiv 7 \pmod{24}\}$.

Lemme

$$J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4.$$

Considérons les courbes hyperelliptiques définies sur $\mathbb{Q}$ de genre 2 d'équations affines

$$\mathcal{C}_n : y^2 = f_n(x) = x(x^2 - n^2)(x^2 - 4n^2), \tag{5}$$

avec $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ q$ un nombre premier et $q \equiv 7 \pmod{24}\}$.

Lemme

$$J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4.$$

Preuve : Il est bien connu que la suite

$$0 \longrightarrow J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})/2J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Sel}^2(J_{\mathcal{C}_n}/\mathbb{Q}) \longrightarrow Ш(J_{\mathcal{C}_n}/\mathbb{Q})[2] \longrightarrow 0 \tag{6}$$

est exacte.

Considérons les courbes hyperelliptiques définies sur $\mathbb{Q}$ de genre 2 d'équations affines

$$\mathcal{C}_n : y^2 = f_n(x) = x(x^2 - n^2)(x^2 - 4n^2), \tag{5}$$

avec $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ q$ un nombre premier et $q \equiv 7 \pmod{24}\}$.

Lemme

$$J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4.$$

Preuve : Il est bien connu que la suite

$$0 \longrightarrow J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})/2J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Sel}^2(J_{\mathcal{C}_n}/\mathbb{Q}) \longrightarrow Ш(J_{\mathcal{C}_n}/\mathbb{Q})[2] \longrightarrow 0 \tag{6}$$

est exacte. Ainsi, on a la formule

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Sel}^2(J_{\mathcal{C}_n}/\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{F}_2} J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})/2J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q}) + \dim_{\mathbb{F}_2} Ш(J_{\mathcal{C}_n}/\mathbb{Q})[2]. \tag{7}$$

Comme

$$\dim_{\mathbb{F}_2} J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})/2J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q}) = \mathrm{rang}(J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})) + \dim_{\mathbb{F}_2} J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})[2], \tag{8}$$

alors

$$\mathrm{rang}(J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Sel}^2(J_{\mathcal{C}_n}/\mathbb{Q}) - \dim_{\mathbb{F}_2} J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})[2]. \tag{9}$$

D'après **Heiden**[6] et **Evink**[7], on a

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \mathsf{Sel}^2(J_{\mathcal{C}_n}/\mathbb{Q}) = 4,$$

or $\dim_{\mathbb{F}_2} J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})[2] = -1 + \#\{$facteurs irréductibles de $f_n(x)$ dans $\mathbb{Q}[X]\} = 4$, donc

$$\mathsf{rang}(J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})) = 0.$$

6. [Hei98] G.-J. van der Heiden, Computing the $2-$descent over $\mathbf{Q}$ for curves of genus 2, (1998).
7. [Evi20] T. Evink, Two-descent on hyperelliptic curves of genus two, (2020).

D'après **Heiden**[6] et **Evink**[7], on a

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \mathsf{Sel}^2(J_{\mathcal{C}_n}/\mathbb{Q}) = 4,$$

or $\dim_{\mathbb{F}_2} J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})[2] = -1 + \#\{\text{facteurs irréductibles de } f_n(x) \text{ dans } \mathbb{Q}[X]\} = 4$, donc

$$\mathsf{rang}(J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})) = 0.$$

Considérons l'application de réduction suivante :

$$J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q}) \longrightarrow J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{F}_p), \quad p \text{ nombre premier.} \tag{10}$$

$$J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})_{\mathsf{tors}} \hookrightarrow J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{F}_p), \quad p \nmid 2\mathsf{disc}(f_n). \tag{11}$$

Le discriminant $\mathsf{disc}(f_n)$ est

$$\mathsf{disc}(f_n) = 2^{10}3^4n^{20}, \tag{12}$$

donc en prenant $p = 5$, on trouve $J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{F}_5) = 16$, ainsi

$$\#J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})_{\mathsf{tors}} \leq 16 \tag{13}$$

$$\text{or} \quad \#J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})[2] = 16; \qquad J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})_{\mathsf{tors}} = J_{\mathcal{C}_n}(\mathbb{Q})[2] \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4.$$

CQFD.

6. [Hei98] G.-J. van der Heiden, Computing the $2-$descent over $\mathbf{Q}$ for curves of genus 2, (1998).
7. [Evi20] T. Evink, Two-descent on hyperelliptic curves of genus two, (2020).

Contributions obtenues dans la thèse

i) M. Camara, M. Fall and O. Sall, Algebraic points on the hyperelliptic curves $y^2 = x^5 + n^2$, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia Mathematica, 22, $21 - 31$. https://studmath.uken.krakow.pl/article/view/10274/9352.

ii) M. Camara, M. Fall and O. Sall, Parametrization of algebraic points of low degree on the hyperelliptic curves $y^2 = x(x^2 - n^2)(x^2 - 4n^2)$. In Nonlinear analysis, geometry and applications. Proceedings of the third biennial international research symposium, NLAGA-BIRS, Saly-Mbour, Senegal, August $21 - 25$, 2023, to appear. Cham : Birkhäuser. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-52681-716.

iii) M. Fall, M. Camara and O. Sall, Algebraic points of degree at most 14 on the Fermicat sept, Journal of the Nigerian Mathematical Society, 42, $95 - 109$. https://ojs.ictp.it/jnms/index.php/jnms/article/download/897/339.

Perspectives de recherche

Les résultats obtenus dans cette thèse ouvrent plusieurs perspectives. Et voici quelques pistes :

- ✍ La détermination de l'ensemble des points algébriques de degré donné porte essentiellement sur les courbes définies sur $\mathbb{Q}$. Par contre, le cas des courbes définies sur un corps de nombres autre que $\mathbb{Q}$ reste un problème ouvert.

8. [Sto15] M. Stoll, Uniform bounds for the number of rational points on hyperelliptic curves of small Mordell-Weil rank, J. Eur. Math. Soc.

Perspectives de recherche

Les résultats obtenus dans cette thèse ouvrent plusieurs perspectives. Et voici quelques pistes :

- ✍ La détermination de l'ensemble des points algébriques de degré donné porte essentiellement sur les courbes définies sur $\mathbb{Q}$. Par contre, le cas des courbes définies sur un corps de nombres autre que $\mathbb{Q}$ reste un problème ouvert.
- ✍ Soit $\mathcal{C}$ une courbe hyperelliptique définie sur $\mathbb{Q}$ de genre $g \geq 3$. Stoll [8] adot() ; montré que si le rang de $J_{\mathcal{C}}(\mathbb{Q})$ satisfait $r \leq g-3$, alors

$$\#\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \leq 33(g-1)+1 \text{ si } r=0 \text{ et } \#\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \leq 8rg+33(g-1)-1 \text{ si } r \geq 1.$$

8. [Sto15] M. Stoll, Uniform bounds for the number of rational points on hyperelliptic curves of small Mordell-Weil rank, J. Eur. Math. Soc.

Perspectives de recherche

Les résultats obtenus dans cette thèse ouvrent plusieurs perspectives. Et voici quelques pistes :

- ✍ La détermination de l'ensemble des points algébriques de degré donné porte essentiellement sur les courbes définies sur $\mathbb{Q}$. Par contre, le cas des courbes définies sur un corps de nombres autre que $\mathbb{Q}$ reste un problème ouvert.
- ✍ Soit $\mathcal{C}$ une courbe hyperelliptique définie sur $\mathbb{Q}$ de genre $g \geq 3$. Stoll [8] adot() ; montré que si le rang de $J_{\mathcal{C}}(\mathbb{Q})$ satisfait $r \leq g-3$, alors

$$\#\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \leq 33(g-1)+1 \text{ si } r=0 \text{ et } \#\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \leq 8rg+33(g-1)-1 \text{ si } r \geq 1.$$

Cas particulier.
Si $g=3$ et $r=0$, alors on obtient

$$\#\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \leq 67. \tag{14}$$

Étudier dans quelle mesure 67 est la bonne borne.

8. [Sto15] M. Stoll, Uniform bounds for the number of rational points on hyperelliptic curves of small Mordell-Weil rank, J. Eur. Math. Soc.

Merci de votre aimable attention !