

# Points Rationnels sur les Courbes Algébriques de Genre 3

Brice Miayoka Moussolo

Université Marien Ngouabi, Congo

Directeurs de thèse:

Basile Guy Richard Bossoto et Tony Ezome

5ème Édition des Journées Algébriques du Gabon

École Normale Supérieure, Libreville

March 19, 2025



# Contexte Général

- Problème : Résolution des équations diophantiennes  $f(x, y) = 0$ , où  $f$  est à coefficients dans un corps de Nombres.
- Un fait: Il n'existe pas un algorithme général connu pour résoudre ce problème.
- Remarque : Ces équations diophantiennes définissent des objets géométriques (Variétés algébriques)

**Objectif:** Concevoir puis implémenter des techniques permettant de déterminer les points rationnels des courbes hyperelliptiques de genre 3, et des quartiques planes

# Théorème de Mordell-Weil et Méthode de Chabauty-Coleman

Soit  $C$  une courbe algébrique de genre  $g$ , Notons  $J_C$  sa Jacobienne (variété abélienne de dim  $g$ )

- Mordell-Weil ont prouvé que  $J_C(K) \simeq \mathbb{Z}^r \times J_C(K)_{tors}$
- Applicable si le rang de Mordell-Weil  $r$  de la courbe est inférieur à son genre  $g$ .
- Permet de calculer un ensemble de points  $\mathbb{Q}_p$ -rationnels contenant tous les points rationnels.
- Défi : le calcul du rang est un problème complexe en genre supérieur.

Nous avons calculé les points rationnels sur les courbes définies sur  $\mathbb{Q}$  données par l'équation  $y^4 - h(x)y^2 + r(x) = 0$  où  $h(x)$  et  $r(x)$  des polynômes de degré 2 et 4 respectivement.

# Points Rationnels sur les Courbes Hyperelliptiques de genre 3 dont les Jacobiennes sont irréductibles de Rang 0

Soit  $\phi : C \rightarrow C$  l'involution hyperelliptique.

- Pour tout point  $P \in C$ , le diviseur  $P + \phi(P)$  est toujours  $\mathbb{Q}$ -rationnel. La classe  $c$  de ce diviseur est indépendante de  $P$ .
- Nous définissons donc une application  $C \rightarrow J_C$  qui envoie  $P$  sur  $[2(P)] - c$ .
- Cette approche est préférable, car elle ne nécessite pas de connaître  $P \in C(\mathbb{Q})$  au préalable (comme c'est le cas avec l'application d'Abel-Jacobi).
- La variété de Kummer  $K$  de  $J_C$ .  $D = [(x_1 : y_1 : 1) + (x_2 : y_2 : 1)] - c$
- $(0 : 1 : -x_1 - x_2 : x_1x_2 : (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 : -(x_1 + x_2)x_1x_2 : x_1^2x_2^2 : \xi(x_1, x_2, y_1, y_2))$  où  $\xi \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ . Notons que pour  $x_1 = x_2$  si

$$(-x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2 = 0.$$

Et dans ce cas, la coordonnée  $x$  est donnée par  $x := -(-x_1 - x_2)/2$ .

# Mobilités Académiques

- Séjour au CIRM à Marseille, France pour Participer au Mois Thématique sur l'arithmétique et la théorie de l'information, du 29 Janvier-03 Mars 2023 financé par le CIMPA et CIRM.



- Séjour de Recherche à Groningen au Pays-Bas en Octobre-Novembre



2023 financé par le **Groupe Coimbra**.

- Séjour de Recherche à Libreville, au Gabon en Avril 2022 et en Juillet-Août 2023 financé par **CNRS** via le Projet REGATE



# Soutien pour avoir accès au logiciel Magma

Nous avons implémenté nos Codes dans Magma.  
Ils sont disponibles sur <https://github.com/Brice202145>.

- Université de Boston (2021-2024)



- Institut Bernoulli, Université de Groningen (depuis Janvier 2025)



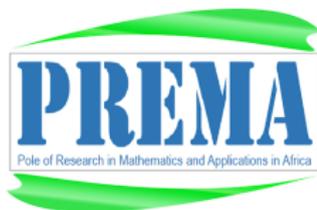
# Pré-Publications et Date de soutenance

- Rational Points of some genus 3 curves from the rank 0 quotient strategy, (preprint, 2023) (soumis).
- Rational points on genus 3 hyperelliptic curves of rank 0( En cours de Soumission).
- Chabauty-Coleman on genus 3 non-hyperelliptic curves with split Jacobian (En cours de soumission)

Date de soutenance: Prévues en Juillet 2025

# École, Conférences et Ateliers

- École de Recherche en théorie de Nombre et Application, à IMSP à Poto-Novo, Bénin en Décembre 2021, financé par



- Journées Algébriques du Gabon (Décembre 2022, Mars 2024, Mars 2025)



# Merci pour votre attention !

- Workshop sur l'Arthmétique et au delà à Libreville, Congo( Octobre 2024) financé par le CNRS en collaboration avec l'ENS de Paris

